Indukce, kvantifikátory, supremum

3b. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

2. $a_n = 2^{n+1} - 1$

4. Označme výrok „osoba a zná osobu b" symbolem $Z(a,b)$, dále označme množinu všech lidí jako L. Pak:

   a) $\forall a \in L\, \forall b \in L\colon\ Z(a,b)$

   b) $\exists a \in L\, \forall b \in L\colon\ Z(a,b)$

   c) $\forall a \in L\, \exists b \in L\colon\ Z(a,b)$

   d) $\exists b \in L\, \forall a \in L\colon\ \neg Z(a,b)$

5. $\exists a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\ \forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2\ \forall t_1, t_2 \in (c,d), t_1 < t_2\colon$

$$(f(x_1) < f(x_2))\ \ \&\ \ (f(t_1) > f(t_2))$$

6. a) Pro $y \in (2,12)$ platí, že $f(y) = 15$.

   b) Funkce f je na $\mathbb{R}$ konstantní.

7. Označme symbolem $V(c,t,h)$ výrok „Člověk c si dá rád jedno pivo v čase t a v hospodě h". Pak si zadaný výrok můžeme napsat jako (kvantifikujeme vždy přes všechny lidi (c), všechny časy (t) a všechny hospody (h)):

$$\forall c : [(\exists t\, \exists h\colon\ V(c,t,h)) \wedge \neg\, (\forall t\, \exists h\colon\ V(c,t,h)) \wedge \neg\, (\forall h\, \exists t\colon\ V(c,t,h))]$$

   Negace tohoto je pak (s využitím pravidel pro negaci kvantifikovaných výroků a pro negaci konjunkce):

$$\exists c : [(\forall t\, \forall h\colon\ \neg V(c,t,h)) \vee (\forall t\, \exists h\colon\ V(c,t,h)) \vee (\forall h\, \exists t\colon\ V(c,t,h))]$$

   Takže, když to přepíšeme do češtiny, „Existuje osoba, která si nikdy nedá ráda jedno pivo, nebo která si ho dá ráda v libovolný čas, nebo která si ho dá ráda v libovolné hospodě."

8. a) Supremum je 1, maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   b) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je -1, minimum rovněž.

   c) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je -1, minimum rovněž.

   d) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   e) Supremum, infimum, maximum ani minimum neexistuje (množina je zhora i zdola neomezená).

   f) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 3, minimum taky.

   g) Supremum je 0, maximum taky. Infimum ani minimum neexistuje.

   h) Supremum je $\frac{5}{6}$, maximum taky. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   i) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   j) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.